

Été 2019

On s'efforcera de ré  
et notamment d'apporter le

### Exercice 1

1. On s'intéresse à la proposition (*autrement dit à l'affirmation mathématique*) suivante :  
« Pour qu'un réel soit racine du polynôme  $3x^2 - 7x - 10$ , il faut qu'il soit égal à  $-1$ . »
  - a. Reformuler cela en recopiant et en complétant ce qui suit (*ne pas se fier aux dimensions des espaces*) :  
« Soit  $x$  un réel quelconque. On a l'implication : ..... = ..... entraîne ..... = ..... »
  - b. Est-elle vraie ?
  - c. Justifier votre réponse.
2. On considère maintenant la proposition :  
« Pour qu'un réel soit racine du polynôme  $3x^2 - 7x - 10$ , il suffit qu'il vaille  $-1$ . »
  - a. Est-elle vraie ? (Justifier)
  - b. Reformuler (cette proposition) sur le modèle de 1.a.
- 3.a. Reformuler la proposition suivante sur le modèle de 1.a.  
« Soit  $\alpha$  un réel quelconque. Si  $\alpha$  est racine du polynôme  $3x^2 - 7x - 10$ , alors on a  $\alpha = -1$ . »
  - b. Est-ce vrai ? (Justifier)
- 4.a. Reformuler la proposition ci-dessous sur le modèle de 1.a.  
« Pour qu'un réel soit solution de l'équation  $-3x^2 - 2x + 4 = 0$ , il faut qu'il soit strictement plus grand que 1024 ou qu'il appartienne à l'intervalle  $\left[-\frac{1+\sqrt{13}}{3}, \frac{-1+\sqrt{13}}{3}\right]$ . »
  - b. Est-elle vraie ? (Justifier)
5. On considère la proposition  
« Soit  $a$  un nombre réel quelconque. Le polynôme  $ax^2 + 2x - 1$  possède une unique racine réelle si et seulement si  $a = -1$ . »

#### Remarques.

- Cette proposition a le même sens que la proposition suivante :  
« Soit  $a$  un nombre réel quelconque. Dire que le polynôme  $ax^2 + 2x - 1$  possède une unique racine réelle revient à dire que  $a = -1$ . »
- La signification est également la même que lorsque l'on écrit :  
« Soit  $a$  un nombre réel quelconque. Nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ si le polynôme } ax^2 + 2x - 1 \text{ possède une unique racine réelle, alors } a = -1, \\ \text{et} \\ \bullet \text{ si } a = -1, \text{ alors le polynôme } ax^2 + 2x - 1 \text{ possède une unique racine réelle.} \end{array} \right.$$

La proposition en question est-elle vraie ? (Justifier)

**Exercice 2** On rappelle que  $\mathbb{N}$  désigne l'ensemble des entiers naturels,  $\mathbb{Z}$  l'ensemble des entiers relatifs (c'est-à-dire l'ensemble des entiers positifs, négatifs ou nuls), et  $\mathbb{R}$  l'ensemble des nombres réels.

Préciser, pour chacune des lignes suivantes, par quel ensemble, parmi  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{R}$ , on peut compléter les points de suspension de façon à obtenir une affirmation juste. **Justifier.**

1. Soit  $x$  un élément de  $\dots$ . Si  $x$  est supérieur ou égal à 3, alors  $x$  est strictement supérieur à 2.
2. Soit  $x$  un élément de  $\dots$ . Si  $x$  est strictement supérieur à 2, alors  $x$  est supérieur ou égal à 3.
3. Soit  $x$  un élément de  $\dots$ . Si  $x$  est supérieur ou égal à 3, alors  $x^2$  est supérieur ou égal à 9.

4. Soit  $x$  un élément de  $\dots$ . Si  $x^2$  est supérieur ou égal à 9, alors  $x$  est supérieur ou égal à 3.
5. Soient  $x$  et  $y$  des éléments de  $\dots$ . Si  $x + y = 0$ , alors  $x = y = 0$ .

**Exercice 3** Justifier soigneusement chacune de vos réponses.

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle.

1. On suppose  $u_0 = 0,333$  et  $u_1 = \frac{1}{3}$ .
  - a. Peut-on affirmer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante ?
  - b. Peut-on affirmer qu'elle n'est pas décroissante ?
2. On suppose maintenant que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante.  
Peut-on affirmer que l'on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  ?
3. On suppose enfin  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .  
Peut-on affirmer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante ?

**Exercice 4** Soit  $f$  une fonction définie sur l'intervalle  $[0, +\infty[$ , à valeurs réelles.

1. On suppose  $f\left(\frac{7}{3}\right) < f(3\sqrt{2})$ .
  - a. Peut-on affirmer que  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[0, +\infty[$  ?
  - b. Peut-on affirmer que  $f$  n'est pas décroissante sur l'intervalle  $[0, +\infty[$  ?
2. On suppose maintenant que la fonction  $f$  est telle que la proposition suivante soit vraie :

*Quels que soient les entiers naturels  $x$  et  $y$ , si  $x < y$ , alors  $f(x) < f(y)$ .*

Peut-on affirmer que  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[0, +\infty[$  ?

3. On suppose pour finir que la fonction  $f$  est telle que la proposition suivante soit vraie :

*Quel que soit  $x \in [0, +\infty[$ , on a  $f(x) < f(x+1)$ .*

Peut-on affirmer que  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[0, +\infty[$  ?

**Exercice 5**

1. J'achète 2 articles dans une grande surface et paye le tout 1 €10. Le plus cher des deux coûte un euro de plus que l'autre. Quel est le prix de l'article le moins cher ?
2. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes.
  - a.  $3 \frac{5x-2}{5} = 6x$ ,
  - b.  $3 \left( \sqrt{8}x - \frac{26}{9} \right) = 6\sqrt{2}x - \frac{13}{\frac{3}{2}}$ ,
  - c.  $x^3 = 2x$ ,
  - d.  $\frac{x^2+2x}{3x^2-x} = 1$ .